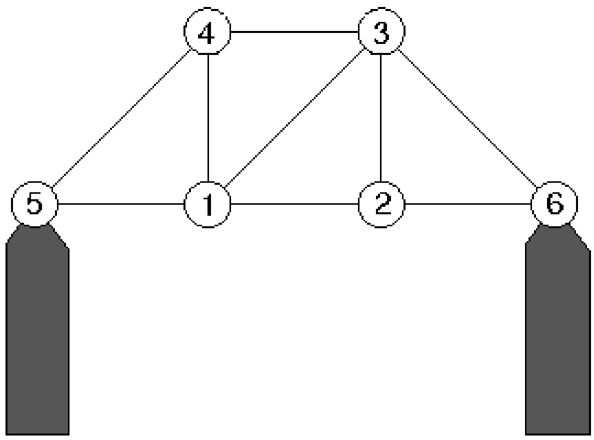
Bestimmung der linearisierten Bewegungsgleichung für die Schwingungen eines Fachwerks

Peter Junglas

30. 12. 2007

1 Herleitung der Bewegungsgleichung

Ein Fachwerk sei gegeben durch Gelenke und Stäbe, z.B.



Einige Knoten sind fest gelagert, alle anderen entsprechen dynamischen Variablen der Masse m. Die Stäbe wirken als Zug-/Druckfedern mit jeweils gleicher Federkonstante c.

Es werden folgende Bezeichnungen eingeführt:

$$
\begin{aligned}
N &= \text{Zahl der dynamischen Knoten (im Beispiel 4)}\\
M &= \text{Gesamtzahl der Knoten (im Beispiel 6)}\\
\vec{x}_i &= \text{Koordinate von Knoten i, } i = 1, \ldots, M\\
\vec{x}_i^{\,0} &= \text{Gleichgewichtsposition von Knoten i, } i = 1, \ldots, M\\
\vec{d}_i &= \vec{x}_i - \vec{x}_i^{\,0} = \text{Abweichung vom Gleichgewicht, } i = 1, \ldots, M
\end{aligned}
$$

In allen Größen bezeichnen die Indexwerte $i = 1 \ldots N$ die dynamischen Knoten, die Werte $i = N + 1 \ldots M$ die festen Knoten. Die dynamischen Variablen für das linearisierte Problem sind die $\vec{d}_i$, wobei $\vec{d}_i = 0$ für i $>$ N. Die Gleichgewichtspositionen $\vec{x}_i^{\,0}$ ergeben sich aus der Minimierung der potentiellen Energie; sie werden als bekannt voraussetzt. Der Einfachheit wird angenommen, dass die Stäbe dann alle entspannt sind.

Zur Beschreibung des Stab-Netzwerks wird eine Verbindungsmatrix

$$A = (a_{ij}), \quad i = 1, \ldots M, \quad j = 1, \ldots M$$

definiert:

$$a_{ij} = \left\{ \begin{array}{c|l} 1 & i \neq j, \text{Stab zwischen } \vec{x}_i \text{ und } \vec{x}_j \\ 0 & i \neq j, \text{kein Stab zwischen } \vec{x}_i \text{ und } \vec{x}_j \\ 0 & i = j \end{array} \right.$$

Dass A auf der Diagonalen 0 ist, vereinfacht i. F. die Schreibweise: Man kann Doppelsummen über i und j hinschreiben, ohne den Fall i=j ausschließen zu müssen.

Die Bewegungsgleichung soll nun mit Hilfe des Euler-Lagrange-Formalismus aufgestellt werden. Dazu müssen zunächst die kinetische Energie T und die potentielle Energie V als Funktion der dynamischen Variablen $\vec{d}_i$ geschrieben werden. Für die potentielle Energie hat man sofort

$$T = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{x}}_i^{\,2} = \frac{1}{2} m \sum_{i=1}^{N} \dot{\vec{d}}_i^{\,2}$$

Die potentielle Energie setzt sich aus den potentiellen Energien V_{ij} der einzelnen Stäbe (= Federn) zusammen:

$$V = \sum_{\substack{i,j \\ i<j}} a_{ij} V_{ij} = \frac{1}{2} \sum_{i,j} a_{ij} V_{ij}$$

Die Einzelbeiträge erhält man als

$$\begin{aligned}
V_{ij} &= \frac{1}{2}c\left\{|\vec{x}_i - \vec{x}_j| - |\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|\right\}^2 \\
&= \frac{1}{2}c\left\{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2 + (\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})^2 - 2\sqrt{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2}\sqrt{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})^2}\right\}
\end{aligned}$$

Die Bewegungsgleichung erhält man nun aus der Lagrangefunktion L = T - V als Euler-Lagrange-Gleichungen

$$\begin{aligned}
& \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{d}}_k} - \frac{\partial L}{\partial \vec{d}_k} &= 0 \\
\Rightarrow \qquad & \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{d}}_k} + \frac{\partial V}{\partial \vec{d}_k} &= 0
\end{aligned}$$

Der Term mit T ist leicht berechnet:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial \dot{\vec{d}}_k} = \frac{d}{dt} m\dot{\vec{d}}_k = m\ddot{\vec{d}}_k$$

Die Berechnung des zweiten Terms ist wesentlich aufwändiger. Zunächst wird die Ableitung der Einzelterme berechnet:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{d}_k} &= \frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{x}_k} \\
&= \frac{1}{2}c\left\{2(\vec{x}_i - \vec{x}_j) - 2\frac{\sqrt{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})^2}}{\sqrt{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2}}(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\right\}(\delta_{ik} - \delta_{jk}) \\
&= c\,(\vec{x}_i - \vec{x}_j)\left\{1 - \frac{\sqrt{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})^2}}{\sqrt{(\vec{x}_i - \vec{x}_j)^2}}\right\}(\delta_{ik} - \delta_{jk}) \\
&= c\,[(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}) + (\vec{d}_i - \vec{d}_j)]\left\{1 - \frac{\sqrt{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})^2}}{\sqrt{[(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}) + (\vec{d}_i - \vec{d}_j)]^2}}\right\}(\delta_{ik} - \delta_{jk})
\end{aligned}$$

Um diesen Term für kleine $\vec{d}_i$ linear zu nähern, berechnen wir zunächst

$$
\begin{aligned}
f(\vec{x}) &:= \frac{1}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{x})^2}} \approx f(0) + \vec{x}\nabla f(0) \\
\nabla f(\vec{x}) &= -\frac{1}{2}\frac{2(\vec{a}+\vec{x})}{\sqrt{(\vec{a}+\vec{x})^6}} \quad \Rightarrow \quad \nabla f(0) = -\frac{\vec{a}}{|\vec{a}|^3} \\
\Rightarrow \qquad f(\vec{x}) &\approx \frac{1}{|\vec{a}|} - \frac{\vec{a}\,\vec{x}}{|\vec{a}|^3}
\end{aligned}
$$

Damit können wir den V-Term linear nähern:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{d}_k} &\approx c\,[(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}) + (\vec{d}_i - \vec{d}_j)](\delta_{ik} - \delta_{jk}) \cdot \\
&\quad \cdot \left\{ 1 - |\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}| \left(\frac{1}{|\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|} - \frac{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})(\vec{d}_i - \vec{d}_j)}{|\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|^3} \right) \right\} \\
&= c\,[(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}) + (\vec{d}_i - \vec{d}_j)] \frac{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})(\vec{d}_i - \vec{d}_j)}{|\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|^2} (\delta_{ik} - \delta_{jk}) \\
&\approx c\,\frac{(\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})(\vec{d}_i - \vec{d}_j)}{|\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|^2} (\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0})(\delta_{ik} - \delta_{jk})
\end{aligned}
$$

Führt man zur Abkürzung den Einheitsvektor zwischen zwei Gleichgewichtspositionen ein:

$$
\vec{e}_{ij}^{\,0} := \frac{\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}}{|\vec{x}_i^{\,0} - \vec{x}_j^{\,0}|},
$$

erhält man

$$
\frac{\partial V_{ij}}{\partial \vec{d}_k} \approx c \left(\vec{e}_{ij}^{\,0} \cdot (\vec{d}_i - \vec{d}_j) \right) \cdot \vec{e}_{ij}^{\,0} (\delta_{ik} - \delta_{jk})
$$

Die Summe liefert dann

$$
\frac{\partial V}{\partial \vec{d}_k} \approx \frac{1}{2} c \sum_{i,j} a_{ij} \left(\vec{e}_{ij}^{\,0} \cdot (\vec{d}_i - \vec{d}_j) \right) \cdot \vec{e}_{ij}^{\,0} (\delta_{ik} - \delta_{jk})
$$

Mit der Abkürzung

$$b_{ij} := a_{ij} \left(\vec{e}_{ij}^{\,0} \cdot (\vec{d}_i - \vec{d}_j) \right) \cdot \vec{e}_{ij}^{\,0}$$

erhält man dann wegen

$$b_{ij} = -b_{ji}$$

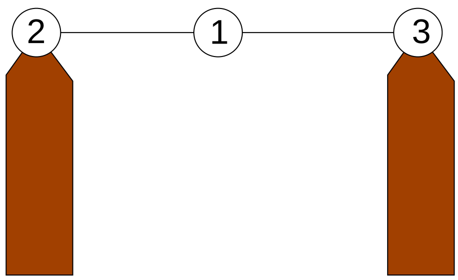
$$\begin{aligned}
\frac{\partial V}{\partial \vec{d}_k} &\approx \frac{1}{2} c \sum_{i,j} b_{ij} \left(\delta_{ik} - \delta_{jk} \right) \\
&= \frac{1}{2} c \left(\sum_j b_{kj} - \sum_i b_{ik} \right) \\
&= \frac{1}{2} c \left(\sum_i b_{ki} - \sum_i b_{ik} \right) \\
&= c \sum_i b_{ki} \\
&= c \sum_i a_{ki} \left(\vec{e}_{ki}^{\,0} \cdot (\vec{d}_k - \vec{d}_i) \right) \cdot \vec{e}_{ki}^{\,0}
\end{aligned}$$

Somit erhalten wir als Bewegunggleichung für die k-te Masse ($k = 1, \ldots, N$)

$$m \ddot{\vec{d}}_k + c \sum_{i=1}^{M} a_{ki} \left(\vec{e}_{ki}^{\,0} \cdot (\vec{d}_k - \vec{d}_i) \right) \cdot \vec{e}_{ki}^{\,0} = 0 \qquad (1)$$

2 Überprüfung an einfachem Beispiel

Das "Fachwerk" besteht nur aus einem beweglichen (N = 1) und zwei festen (M = 3) Knoten:



Es gibt nur einen dynamischen Vektor:

$$\vec{d}_1 = \begin{pmatrix} d_x \\ d_y \end{pmatrix}$$

Die Gleichgewichtsvektoren sind

$$\vec{x}^{\,0}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{\,0}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{x}^{\,0}_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

daher hat man die Einheitsvektoren

$$\vec{e}^{\,0}_{12} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{e}^{\,0}_{13} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Mit der Verbindungsmatrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

erhält man die Bewegungsgleichung

$$\begin{aligned} 0 &= m\ddot{\vec{d}}_1 + c\left(a_{12}(\vec{e}^{\,0}_{12}\vec{d}_1)\vec{e}^{\,0}_{12} + a_{13}(\vec{e}^{\,0}_{13}\vec{d}_1)\vec{e}^{\,0}_{13} +\right) \\ &= m\begin{pmatrix} \ddot{d}_x \\ \ddot{d}_y \end{pmatrix} + 2c\begin{pmatrix} d_x \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die x-Komponente ist wie erwartet. In y-Richtung ergibt sich tatsächlich in linearer Näherung keine Federkraft.

3 Berechnung der Steifigkeitsmatrix

Für die Eigenwertanalyse bringt man die Bewegungsgleichung in die Form

$$M\ddot{\vec{x}} + C\vec{x} = 0,$$

wobei der Vektor $\vec{x}$ alle Koordinaten enthält, im Fall eines 2d-Fachwerks also 2N viele. Zur expliziten Bestimmung der Massenmatrix M und der

Steifigkeitsmatrix C zerlegen wir die Bewegungsgleichung (1) in x- und y-Komponenten:

$$m\ddot{d}_{k,x} + c\sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\cdot(\vec{d}_k - \vec{d}_i)\right)\cdot e^0_{ki,x} = 0 \tag{2}$$

$$m\ddot{d}_{k,y} + c\sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\cdot(\vec{d}_k - \vec{d}_i)\right)\cdot e^0_{ki,y} = 0 \tag{3}$$

Daraus ergibt sich sofort, dass die Massenmatrix diagonal ist

$$M = m\mathbf{1}$$

Um die Struktur der Steifigkeitsmatrix zu erkennen, müssen die Summanden noch in x- und y-Anteile getrennt werden. Für die x-Komponente (Gleichung (2)) erhält man

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{M} & a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\cdot(\vec{d}_k - \vec{d}_i)\right)\cdot e^0_{ki,x} \\
= & \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\vec{d}_k\right)e^0_{ki,x} - \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\vec{d}_i\right)e^0_{ki,x} \\
= & \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(e^0_{ki,x}d_{k,x} + e^0_{ki,y}d_{k,y}\right)e^0_{ki,x} - \sum_{i=1}^{M} a_{ki}\left(e^0_{ki,x}d_{i,x} + e^0_{ki,y}d_{i,y}\right)e^0_{ki,x} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,x})^2\right)d_{k,x} + \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y}\right)d_{k,y} \\
& -\sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,x})^2 d_{i,x} - \sum_{i=1}^{M} a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y}d_{i,y}
\end{aligned}$$

Analog erhält man für die y-Komponente

$$\begin{aligned}
\textstyle\sum_{i=1}^{M} & a_{ki}\left(\vec{e}^{\,0}_{ki}\cdot(\vec{d}_k - \vec{d}_i)\right)\cdot e^0_{ki,y} \\
= & \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y}\right)d_{k,x} + \left(\sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,y})^2\right)d_{k,y} \\
& -\sum_{i=1}^{M} a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y}d_{i,x} - \sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,y})^2 d_{i,y}
\end{aligned}$$

Daraus lässt sich sofort die C-Matrix ablesen, die folgende Indexstruktur hat:

$$C = (C_{i\alpha,j\beta}), \qquad \alpha,\beta \in \{x,y\}, \quad i,j = 1,\ldots,N$$

Für $k = 1,\ldots,N$:

$$\begin{aligned}
C_{kx,kx} &= \sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,x})^2 \\
C_{kx,ky} &= \sum_{i=1}^{M} a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y} = C_{ky,kx} \\
C_{ky,ky} &= \sum_{i=1}^{M} a_{ki}(e^0_{ki,y})^2
\end{aligned}$$

Für $k = 1,\ldots,N$ und $i = 1,\ldots,N$ $(i \neq k)$:

$$\begin{aligned}
C_{kx,ix} &= -a_{ki}(e^0_{ki,x})^2 \\
C_{kx,iy} &= -a_{ki}e^0_{ki,x}e^0_{ki,y} = C_{ky,ix} \\
C_{ky,iy} &= -a_{ki}(e^0_{ki,y})^2
\end{aligned}$$

In einer numerischen Simulation wird man in der Regel den Doppelindex zu einem Einfachindex verarbeiten und C als normale Matrix schreiben, etwa indem man x- und y-Komponenten hintereinander anordnet (1x, 1y, 2x, 2y,..), formal also einen Einfachindex $l = 1,\ldots,2*N$ einführt mit

$$\begin{aligned}
kx &\rightarrow l = 2k-1 \\
ky &\rightarrow l = 2k
\end{aligned}$$

4 C-Matrix des Eingangsbeispiels

Für das Beispiel-Fachwerk am Anfang liest man ab:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{x}_1^{\,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_2^{\,0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_3^{\,0} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_4^{\,0} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \vec{x}_5^{\,0} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{x}_6^{\,0} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Damit berechnet man leicht die $\vec{e}_{ij}^{\,0}$ und daraus die Steifigkeitsmatrix

$$C = \begin{pmatrix} 2.5 & 0.5 & -1.0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0.5 & 1.5 & 0 & 0 & -0.5 & -0.5 & 0 & -1.0 \\ -1.0 & 0 & 2.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1.0 & 0 & -1.0 & 0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & 0 & 2.0 & 0 & -1.0 & 0 \\ -0.5 & -0.5 & 0 & -1.0 & 0 & 2.0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1.0 & 0 & 1.5 & 0.5 \\ 0 & -1.0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.5 & 1.5 \end{pmatrix}$$